

Uniformização de Superfícies de Riemann

Seminário

Índice

- 1 Introdução
- 2 Diferenciais de Riemann
- 3 Teorema da Existência de Riemann
- 4 Funções super-harmónicas
- 5 Fim

Superfícies de Riemann

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão 2 (uma superfície) e conexa.

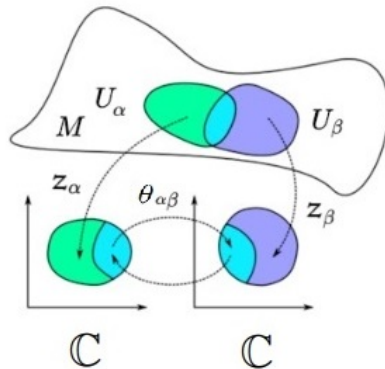
M diz-se uma **Superfície de Riemann** se existe atlas complexo $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ de M , isto é:

- $(U_\alpha)_\alpha$ é cobertura de M por abertos (de M) ;
- $z_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ é homeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{C}$;
- as funções de transição:

$$\theta_{\alpha\beta} = z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \text{ são } \underline{\text{holomorfas}}.$$

(Quando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.)

► Às funções z_α chamamos **coordenadas locais**.



Exemplos Importantes

- $\mathbb{C}$;
- Domínios em $\mathbb{C}$, como $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ou o Hiperplano complexo superior: $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$;
- Esfera de Riemann: $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathcal{S}^2$, a compactificação por um ponto de $\mathbb{C}$.

Funções holomorfas e conformais

Dadas duas superfícies de Riemann M e N , uma função contínua $f : M \longrightarrow N$ é **holomorfa** se dadas quaisquer coordenadas locais ϕ e ψ , a função $\phi^{-1} \circ f \circ \psi$ é função holomorfa (em $\mathbb{C}$).

Uma função contínua $f : M \longrightarrow N$ é **biholomorfa** / **conforme** se f for bijetiva e holomorfa.

Dizemos que duas superfícies de Riemann são **isomorfas** ou **conformemente** / **analiticamente equivalentes** se existir mapa conforme entre elas.

Teorema da Uniformização de Riemann

Teorema (Uniformização De Riemann)

Se M for superfície de Riemann simplesmente conexa, M é conformemente equivalente a uma das três seguintes superfícies:

- $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;
- $\mathbb{C}$;
- $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \simeq \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$.

(As três são conformemente distintas.)

Formas Diferenciáveis

Tal como em variedades diferenciáveis, a cada superfície de Riemann podemos associar 1-formas (diferenciáveis) a M .

Uma **1-forma (diferenciável)** ω na superfície de Riemann M é uma associação de duas funções contínuas (complexas) f e g a cada coordenada local $z = x + iy$ de M tais que:

$$\omega = f \, dx + g \, dy$$

é invariante por mudanças de coordenadas.

Ou seja:

Formas Diferenciáveis [...]

Se $\tilde{z}$ for outra coordenada local cujo domínio intersesta o domínio de z e $\omega = \tilde{f} d\tilde{x} + \tilde{g} d\tilde{y}$ então tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{f}(\tilde{z}) \\ \tilde{g}(\tilde{z}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z(\tilde{z})) \\ g(z(\tilde{z})) \end{pmatrix} = \\ &= \left(\mathbf{Jac}(x, y)_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \right)^T \begin{pmatrix} f(z(\tilde{z})) \\ g(z(\tilde{z})) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(DIZER QUE A FORMA QUE DEFINIMOS UMA 1-FORMA ω EM M É SECÇÃO DO FIBRADO COTANGENTE, IE, ALGO QUE A CADA PONTO ASSOCIA UMA FUNÇÃO LINEAR E COMO ESTAS 2

Integração de 1-formas em Superfícies de Riemann

1-formas numa Superfícies de Riemann M só podem ser integradas sobre [1-cadeias](#), ou seja, uma união finita de caminhos diferenciáveis por pedaços.

Para um caminho $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ contido numa única coordenada local $z = x + iy$ e uma 1-forma $\omega = f dx + g dy$, temos que:

$$\int_{\gamma} \omega := \int_0^1 \left\{ f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \frac{d\gamma_1(t)}{dt} + g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \frac{d\gamma_2(t)}{dt} \right\} dt$$

Derivada Exterior (complexa)

Dada uma 0-forma, isto é, uma função f de classe C^1 numa superfície de Riemann M , definimos a **Derivada Exterior** $d : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k+1} M$ de uma função f como a 1-forma:

$$df := f_x dx + f_y dy$$

Analogamente, para uma 1-forma ω escrita como $f dx + g dy$:

$$d\omega := d(f dx) + d(g dy) = (g_x - f_y) dx \wedge dy$$

(FALAR DA NOTAÇÃO f_z e $f_{\bar{z}}$)

(FALAR QUE u É HOLOMORFA SSE C-R SSE $u_{\bar{z}=0}$)

(MENCIONAR QUE d TAMBÉM PODE SER DEFINIDO COMO $f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$)

(FALAR DO TEOREMA DE STOKES)

Operador de conjugação

Definimos, agora, o **Operador de Conjugação** : $*$.

Para uma 1-forma $\omega = f \, dx + g \, dy$,

$$*\omega := -g \, dx + f \, dy$$

Se ω for expressa na forma $u(z) \, dz + v(z) \, d\bar{z}$, então:

- $*\omega = -iu(z) \, dz + iv(z) \, d\bar{z}$

(FALAR QUE A SUA BOA DEFINIÇÃO VEM MESMO DA
ESTRUTURA COMPLEXA DAS SUPERFÍCIES de Riemann)

(FALAR DE FORMAS FECHADAS, EXATAS E AGORA CO-EXATA
E CO-FECHADA.)

(SE CALHAR MENCIONAR TEOREMA DE POINCARÉ!!!!!!!!!!!!)

Funções e Diferenciais Harmónicas

Se f é uma função de classe C^2 numa superfície de Riemann M , definimos o **Laplaciano** de f em coordenadas locais $z = x + iy$:

$$\underline{\Delta} f := (f_{xx} + f_{yy}) dx \wedge dy$$

Propriedade Importante: $\Delta f = d^* df$.

Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ diz-se **harmónica** se $\Delta f \equiv 0$.

(FALAR QUE f É HARMÓNICA SSE DERIVANDO EM ORDEM A $\bar{z}$ E DEPOIS EM ORDEM A z DÁ 0 PK $\partial_z \circ \partial_{\bar{z}} = 1/4(\partial_{xx} + \partial_{yy})$)

Funções e Diferenciais Harmónicas [...]

ω é 1-forma **harmónica** se, localmente, $\omega = df$ com f função harmónica.

Teorema (Classificação de diferenciais harmónicos)

- ω diz-se 1-forma harmónica se e só se ω é fechada e co-fechada ;
- $\omega = u \, dz + v \, d\bar{z}$ é harmónica se e só se u e $\bar{v}$ são holomorfas.

Diferenciais holomorfos

Uma 1-forma ω diz-se **holomorfa** se, localmente, $\omega = df$ com f holomorfa.

Teorema (Classificação de diferenciais holomorfos)

- ω é holomorfa se e só se ω é fechada e $^*\omega = -i\omega$;
- $u \, dz + v \, d\bar{z}$ é holomorfa se e só se u é holomorfa e $v \equiv 0$.

Funções Meromorfas

- Funções meromorfas definidas em $\mathbb{C}$:

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é meromorfa



f é holomorfa exceto num conjunto isolado de pontos $\mathcal{L}$, cada um destes sendo um pólo



f é da forma g/h onde g e h são holomorfas e $\mathcal{L} = \{\text{zeros de } h\}$



f é uma função holomorfa sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e $f^{-1}(\{\infty\})$ é um conjunto isolado.

(DIZER EXEMPLOS DE HOLOMORFAS E O NOEXEMPLO DE $e^{\frac{1}{z}}$)
(FALAR AGORA DE FUNÇÕES MEROMORFAS NO
GERAL!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!)

(DIZER O TEOREMA DE QUE NUMA S.R. COMPACTA, AS
HOLOMORFAS SÃO CONSTANTES)

(MAS POR EXEMPLO, SERÁ QUE ENCONTRAMOS FUNÇÃO)
(E POR ISSO PÔMOS A SEGUINTE QUESTÃO.... [PRÓXIMO SLIDE]
)

Existência de Funções Meromorfas? E Harmónicas?

Questão:

Dada uma superfície de Riemann M , será que **existem funções meromorfas não constantes** definidas em M ?

► Para responder a esta pergunta, inicialmente, vamos estudar a existência de funções mais simples, as harmónicas !

Funções Harmónicas e sua Existência

Teorema (Existência de Funções Harmónicas)

M superfície de Riemann.

z coordenadas locais num ponto P tal que $z(P) = 0$.

Então: existe função $u : M \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

- u é harmónica em $M \setminus \{P\}$;
- $u - z^{-n}$ é harmónica em qualquer vizinhança suficientemente pequena de P .

Teorema da Existência de Riemann

Teorema (Teorema da Existência de Riemann)

Toda a superfície de Riemann possui uma função meromorfa não constante.

(FALAR OS COROLÁRIOS DE QUE QQ S.R. É METRIZÁVEL, ALÉM DISSO, 2-CONTÁVEL E POR FIM, TRIANGULÁVEL!!!!!!!)

Funções Super-Harmónicas

Nota: A partir de agora, suporemos que todas as funções apenas tomam valores em $\mathbb{R}$!

Seja M uma superfície de Riemann.

Uma função $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se super – harmónica se:

Dado qualquer domínio $D \subseteq M$, $\forall h$ função harmónica em D :

$u \equiv h$ em D ou $u > h$ em D .

Superfícies Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas

Dada uma superfície de Riemann simplesmente conexa, M , podemos categorizá-la de acordo com a sua compacidade e a existência ou não de um certo tipo de funções super-harmónicas:

Elíptica: M é compacta;

Parabólica: M não é compacta e M não possui uma função super-harmónica positiva e não constante;

Hiperbólica: (M não é compacta e) M possui uma função super-harmónica positiva e não constante.

Funções de Green

Seja M superfície de Riemann, $P \in M$.

Uma função g é uma Função de Green em M (com singularidade P) se:

1. g é harmónica em $M \setminus \{P\}$;
 2. $g > 0$ em $M \setminus \{P\}$;
 3. Dada coordenada local z tal que $z(P) = 0$, então $g(z) + \log|z|$ é harmónica numa vizinhança de P ;
 4. Se $\hat{g}$ é outra função a satisfazer (1. – 3.) , então $\hat{g} \geq g$.
- O ponto 4. implica que uma função de Green, se existir, é única !
- Notação: $g(P, Q)$ representa a função de Green em M , com singularidade P , avaliada em Q !

IV.4.4. - Hiperbólicas

IV.4.5. - Compactas e Parabólicas

Existência de Funções de Green

Teorema (Teorema das Funções de Green)

M superfície de Riemann.

M é hiperbólica se e só se M possui alguma função de Green.

Caraterização de Superfícies Hiperbólicas

Teorema

Se M é Superfície de Riemann com $H_1(M) = \{0\}$, hiperbólica então:

$$M \simeq \mathcal{D}$$

Caraterização de Superfícies Elípticas e Parabólicas

Teorema

Se M é Superfície de Riemann com $H_1(M) = \{0\}$, elíptica (resp. parabólica) então:

$$M \simeq \mathbb{C}_\infty \text{ (resp. } \mathbb{C})$$

Fim !