



Teoria de Representação

Relatório do Trabalho

Guilherme Nascimento up202009525

Junho 2024

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar e construir uma demonstração dum resultado estrutural e de importância inestimável para o desenvolvimento da Teoria de Representação: o Teorema de Ado, além dum breve menção a algumas das suas muitas aplicações interessantes.

Inicialmente, vamos introduzir e rever alguns conceitos primordiais da Teoria de Lie para, de seguida, começarmos o nosso procedimento da criação dum representação fiel para qualquer álgebra de Lie, evoluindo de exemplos mais simples para o caso geral.

2 Revisões e Álgebras de Lie

► Definição 1

$\mathcal{L}$ é uma **Álgebra de Lie** se for um espaço vetorial munido dum operação $[\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ bilinear que satisfaz:

- $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathcal{L}$;
- $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \forall x, y, z \in \mathcal{L}$.

Notas:

A primeira propriedade é equivalente a $[x, x] = 0, \forall x \in \mathcal{L}$ caso $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$.
À operação $[\cdot, \cdot]$ chamamos "parêntesis/colchete/produto de Lie".

A álgebra de Lie $\text{End}(V)$:

Suponha-se agora que V é um espaço vetorial.

Um exemplo particular (e bem útil) dum álgebra de Lie trata-se do conjunto dos endomorfismos de V , denotado por $\text{End}(V)$, ou seja, o conjunto formado pelas aplicações lineares $V \rightarrow V$ onde o colchete de Lie é:

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Também iremos representar $\text{End}(V)$ por $\mathfrak{gl}(V)$.

3 Homomorfismos, subálgebra e ideal

Álgebra Quociente

► **Definição 2**

Se L e V são álgebras de Lie, uma aplicação linear $\varphi: L \rightarrow V$ é um **homomorfismo de álgebras de Lie** se:

- $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$, $\forall x, y \in L$.

Caso o homomorfismo seja bijetivo, a função φ diz-se um **isomorfismo de álgebras de Lie**.

► **Definição 3**

Um subespaço vetorial $K \leq L$ é uma **subálgebra** se $[K, K] \subseteq K$.

► **Definição 4**

Um subespaço vetorial $\mathcal{I} \leq L$ diz-se um **ideal** se $[\mathcal{I}, L] \subseteq \mathcal{I}$.
(Neste caso, escrevemos ' $\mathcal{I} \trianglelefteq L$ '))

Exemplos:

- ★ $Z(L)$ e $[L, L]$ são ambos exemplos de ideais de L .
- ★ Para qualquer conjunto $I \subseteq L$, denotaremos por $\langle I \rangle$ o menor ideal em L que contém I .

Suponhamos agora que $\mathfrak{h}$ é um ideal da álgebra de Lie L .

A estrutura dum ideal torna possível a criação duma nova álgebra de Lie a partir da original, a Álgebra Quociente $L/\mathfrak{h}$.

► **Definição 5**

Seja L álgebra de Lie e $\mathcal{I}$ um seu ideal, podemos então construir a **Álgebra Quociente**: $L/\mathcal{I}$, onde:

- $L/\mathcal{I} = \{x + \mathcal{I} \mid x \in L\}$;
- a operação $[\ , \]$ é (bem) definida por: $[x + \mathcal{I}, y + \mathcal{I}] = [x, y] + \mathcal{I}$.

4 Representações e L –Módulos

Enunciado do Teorema de Ado

► **Definição 6**

L álgebra de Lie.

Uma **representação** de L é um homomorfismo $\rho : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de L sobre $\mathfrak{gl}(V)$, para algum espaço vetorial V .

► Além disso, uma representação diz-se **fiel** se for injetiva.

Estamos agora em condições de enunciar o objeto principal do nosso estudo:

Teorema de Ado

Seja L álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica nula.

Então existe uma representação fiel de L , $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ num espaço V de dimensão finita!

- Note-se que a partir duma representação V duma álgebra de Lie L :

$$\rho : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

$$l \longmapsto \rho(l) : V \rightarrow V$$

podemos definir uma ação $\cdot$ de L em V , dada por $l \cdot v = \rho(l)(v)$.
Isto faz de qualquer representação V um L –módulo !

- Analogamente, se V é um L –módulo que satisfaz $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$, $\forall x, y \in L$, $\forall v \in V$, com $\cdot$ bilinear, pondo $\rho(x)(v) = x \cdot v$ vemos que V é, de facto, uma representação de L .

5 Casos mais simples

Apesar do enunciado acessível, o Teorema de Ado revela-se surpreendentemente complicado de provar em toda a sua generalidade!

Vejamos, então, primeiro alguns casos onde a construção duma representação fiel de dimensão finita é mais simples.

Apesar de serem exemplos bastante restritos, ambos serão de grande utilidade para atingirmos o nosso objetivo final:

► **Caso I** : Álgebras de Lie Abelianas ($Z(L) = L$)

$$\phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L \times \mathbb{F})$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow \phi(x) = \phi_x : L \times \mathbb{F} &\longrightarrow L \times \mathbb{F} \\ (y, \lambda) &\mapsto (\lambda x, 0) \end{aligned}$$

► **Caso II** : $Z(L) = 0$

$$ad : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$

$$x \rightarrow ad(x) = ad_x : L \longrightarrow L$$

$$y \mapsto [x, y]$$

Caso I: Note-se que $\phi([a, b])(y, \lambda) = \phi_{[a, b]}(y, \lambda) = (\lambda[a, b], 0) = (0, 0)$ (por ser abeliana) e:

$$\begin{aligned} [\phi(a), \phi(b)](y, \lambda) &= \\ = \{\phi(a) \circ \phi(b) - \phi(b) \circ \phi(a)\}(y, \lambda) &= \\ = \phi(a)(\lambda b, 0) - \phi(b)(\lambda a, 0) &= \\ = (0, 0) - (0, 0) &= \\ = (0, 0) \end{aligned}$$

Logo, ϕ é uma representação de L . Além disso, ϕ é injetivo uma vez que $\phi(x) = \phi(y) \implies \phi(x)(\cdot, 1) = \phi(y)(\cdot, 1) \implies (x, 0) = (y, 0) \implies x = y$.

Caso II: Esta nada mais é do que a representação adjunta que é fiel dado o seu núcleo ser precisamente $Z(L)$.

6 Teorema de Ado, Caso Nilpotente

Nesta secção, teremos por objetivo elaborar uma forma de construir uma representação fiel para álgebras de Lie nilpotentes.

Para tal, recorreremos ao produto tensorial!

Dadas duas álgebras de Lie, V e W , é sabido que podemos construir o seu produto tensorial:

$$V \otimes W$$

Mais geralmente, podemos definir $T^m V$ como sendo $V^{\otimes m}$, ou seja,

$$\bigotimes_{i=1}^m V = V \otimes \cdots \otimes V.$$

Por convenção, assumimos que $V^{\otimes 0} = \mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é o corpo associado ao espaço vetorial V . Generalizando este processo, chegamos à seguinte definição:

► **Definição 7** ($T(V)$)

A **Álgebra Tensorial de V** é:

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n V = \mathbb{F} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus V^{\otimes 3} \oplus \cdots,$$

ou seja, o conjunto dos tuplos $(a_n)_{n \geq 0}$, onde $a_n \in T^n V$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ e a_n é igual a 0 quase sempre (ie, exceto num número finito de posições).

$T(V)$ é também uma álgebra unitária. Para $x \in T^k V$ e $y \in T^l V$ consideramos o seu produto xy como:

$$xy = x \otimes y \in T^{(k+l)} V \subseteq T(V)$$

A Álgebra Tensorial é uma ferramenta muito poderosa e da qual surgem novas e importantes estruturas, tais como a Álgebra Simétrica, $S(V)$, a Álgebra Exterior, $\bigwedge V$ e ainda o nosso principal "ingrediente" para a formação duma representação fiel: a Álgebra Universal Envolvente de L , introduzida infra:

► **Definição 8** ($U(\mathfrak{g})$)

Consideremos $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie.

A sua **Álgebra Universal Envolvente** é definida por:

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / \langle a \otimes b - b \otimes a - [a, b] \mid a, b \in \mathfrak{g} \rangle.$$

(Abreviaremos a classe $x + I$ e $xy + I$ em $U(L)$ para apenas " x " e " xy ")

Note-se que $\mathfrak{g}$ atua em $U(\mathfrak{g})$ através de multiplicação à esquerda:

$$\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(U(\mathfrak{g}))$$

$$x \longmapsto \phi(x) = \phi_x : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$$

$$\phi_x(y) = xy$$

ϕ está assim bem definida e é um homomorfismo injetivo, isto é, uma representação fiel de L !

Demonstração:

De modo a simplificar a escrita, colocamos:

$$I = \langle a \otimes b - b \otimes a - [a, b] \mid a, b \in \mathfrak{g} \rangle.$$

É de ressaltar assim que os elementos de I são combinações lineares de elementos da forma:

$$t(a \otimes b - b \otimes a - [a, b])t', \text{ com } t, t' \in T(\mathfrak{g}).$$

★ ϕ é homomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi_{[x,y]}(a + I) &= [x, y]a + I = \\ &= [x, y]a + \underbrace{\{(-[x, y] + xy - yx)a\}}_{\in I} + I = (xy - yx)a + I = \\ &= (\phi_x \phi_y - \phi_y \phi_x)(a + I) \end{aligned}$$

★ Injetividade: note-se que $\phi(x)$ é um endomorfismo em $U(\mathfrak{g})$.

Se $\phi(x) = \phi(y)$, em particular, $\phi(x)(1) = \phi(y)(1)$, ou seja: $x = y$.

(Esta última igualdade justifica-se melhor com o **Corolário** presente na próxima página.)

■

Então... será que acabamos de provar o Teorema de Ado?
 Poderia-se pensar que sim! No entanto, recordemos o enunciado do teorema em questão: "[...] existe uma representação fiel de L , $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ num espaço V de dimensão finita."

Problema: Em geral, $U(\mathfrak{g})$ tem dimensão infinita!

E a justificação reside no seguinte teorema:

Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

Suponhamos L álgebra de Lie de base $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Então, de acordo com o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt,

$U(L)$ tem por base os monómios $y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$, onde cada $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i \in 1, \dots, n$.

(A título de curiosidade, uma prova deste teorema pode ser encontrada em [1], capítulo 17.4)

Em particular, daqui advém a (infeliz) inferência sobre a dimensão de $U(L)$.

Assim, ainda precisamos de avançar um pouco mais para alcançar o nosso objetivo...

No entanto antes de o fazermos, é de ressaltar um corolário importante do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt:

Corolário.

Qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ mergulha em $U(\mathfrak{g})$, em particular, o homomorfismo natural $i : \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ é injetivo e podemos identificar $x \in \mathfrak{g}$ com $i(x) \in U(\mathfrak{g})$.

Dito por outras palavras, a Álgebra Envolvente Universal $U(\mathfrak{g})$ "contém" a álgebra original $\mathfrak{g}$ e na verdade, podemos ver $U(\mathfrak{g})$ como:

$$\mathbb{F} + \sum_{n \geq 1} \underbrace{i(\mathfrak{g}) \cdots i(\mathfrak{g})}_{n \text{ vezes}}$$

Demonstração do Teorema de Ado para Álgebras Nilpotentes:

Suponhamos L álgebra de Lie nilpotente, de forma que $L^k = 0$ e $L^{k-1} \neq 0$. Vamos escolher $(x_1, \dots, x_n)$ base de L de modo que os primeiros n_i elementos geram L^{k-i} .

Pelo teorema anterior, os monómios $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ formam uma base da álgebra Envolvente Universal: $U(L)$. No entanto, acabamos de averiguar o problema sobre a sua dimensão! Iremos remediar esta pequena inconveniência através do seguinte truque:

Seja um elemento $z = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in U(L)$ arbitrário com número finito de $c_{\alpha} \neq 0$.

Definimos uma função especial, $ord: U(L) \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

- 0. $ord(1) = 0$;
- 1. Para os elementos da base de L : $ord(x_i) = \max\{s \mid x_i \in L^{s-1}\}$;
- 2. Para monómios da base de $U(L)$: $ord(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot ord(x_i)$;
- 3. $ord(\sum_{\alpha} c_{\alpha} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}) = ord(\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}) = \min\{ord(x^{\alpha}) \mid c_{\alpha} \neq 0\}$.

Agora, vamos finalmente extrair de $U(L)$ e desta nova função um novo conjunto de dimensão finita. Pomos:

$$\underline{U^{(m)}(L)} := \{z \in U(L) : ord(z) \geq m\}$$

- $U^{(m)}(L)$ é um ideal de $U(L)$;
- a álgebra quociente $U(L)/U^{(m)}(L)$ possui dimensão finita! (pois é gerada pelos monómios $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ com $ord < m$)

Considerando agora a representação:

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(U(L)/U^{(m)}(L))$$

$$x \mapsto \phi(x) = \phi_x : U(L)/U^{(m)}(L) \rightarrow U(L)/U^{(m)}(L)$$

$$\phi(x)(v) = \phi_x(v) = xv$$

Se $m > k$, ϕ será uma representação fiel:

Notamos que se x_i é elemento da base de L ,

$ord(x_i) = \max\{s \mid x_i \in L^{s-1}\} \leq k$. Logo, qualquer elemento de L tem ordem $\leq k$.

Assim, $\phi_x(1) = x \neq 0$ em $U(L)/U^{(m)}(L)$, desde que x pertença a $L/\{0\}$ pelo que ϕ é injetiva e representação fiel.

■

7 Produto Semidireto

► Definição 9

Uma **derivação** numa álgebra de Lie L é uma aplicação linear $\delta : L \rightarrow L$ tal que:

$$\delta([x, y]) = [x, \delta(y)] + [\delta(x), y], \forall x, y \in L$$

Escrevemos $Der(L)$ como o conjunto das derivações de L .

Exemplo: $ad_L \subseteq Der(L)$, ou seja, para qualquer $x \in L$: ad_x é uma derivação em L .

Considere-se agora $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ subálgebra de $\mathfrak{g}$ de forma que $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$, como espaços vetoriais.

► **Produto semidireto** de $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{h}$ (com respeito a um homomorfismo $\delta: \mathfrak{h} \rightarrow Der(\mathfrak{n})$)

Espaço vetorial $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ munido do seguinte colchete de Lie:

$$[(n, h); (n_0, h_0)] := ([n, n_0] + \delta(h)n_0 - \delta(h_0)n ; [h, h_0])$$

Representamos o produto semidireto de $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{h}$ com respeito a δ por $\mathfrak{n} \rtimes_{\delta} \mathfrak{h}$.

No caso especial onde o homomorfismo δ é igual à nossa representação adjunta, ou seja, $\delta(h)(n) = [h, n]$, chamamos ao produto semidireto $\mathfrak{n} \rtimes_{\delta} \mathfrak{h}$ o **produto semidireto interno** entre $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{h}$ e omitimos a derivação: $\mathfrak{n} \rtimes \mathfrak{h}$.

8 Álgebras Redutíveis

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é álgebra de Lie **redutível** se $\mathfrak{g}$ for soma direta de submódulos irredutíveis para a representação adjunta de $\mathfrak{g}$.

Vejamos algumas propriedades sobre este tipo de álgebras que nos serão bastante úteis:

Proposição:

Suponhamos $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie redutível de dimensão finita n . Então:

1. $\forall \mathfrak{J} \trianglelefteq \mathfrak{g}, \exists \mathfrak{L}$ ideal de $\mathfrak{g} : (\mathfrak{g} = \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{L})$;

[Existência de um ideal complementar]

2. Se $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, então ambos $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ são redutíveis;

3. $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, com $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ semisimples.

Demonstração:

Note-se que as representações irredutíveis, ie, os $\mathfrak{g}$ —submódulos irredutíveis para a representação adjunta são exatamente ideais simples de $\mathfrak{g}$ e os abelianos de dimensão = 1.

Ou seja, podemos exprimi-lo como soma direta:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k \oplus Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_m.$$

Onde Z_j ($1 \leq j \leq m$) são ideais abelianos de dimensão igual a 1 e os restantes ideais simples são os $\mathfrak{g}_i$ ($1 \leq i \leq k$).

1.

A prova deste resultado será feita através do demonstração que iremos propor em **2.**, usando a parte entre (**), uma vez que aí concluímos que qualquer ideal de $\mathfrak{g}$ é da forma $\mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_j} \oplus Z_{j_1} \cdots \oplus Z_{j_N}$ e assim, para encontrar o seu ideal complementar basta considerar a soma direta dos $\mathfrak{g}_c$ e dos Z_d com índices que não façam parte da decomposição do ideal anterior.

2.

(**)

Começamos por recordar o seguinte resultado:

”Se $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$, onde cada I_j representa um ideal simples de $\mathfrak{g}$ então qualquer ideal de $\mathfrak{g}$ é da forma $I_{j_1} \oplus \cdots \oplus I_{j_m}$ com $0 \leq m \leq n$ e $0 < j_1 < \cdots < j_n < n$.”

A demonstração deste resultado, presente na aula 14, página 18 das Notas usadas em aula, afirma que se $i \neq j$, então, neste contexto,

$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = (0)$ e mais geralmente, $[\mathfrak{g}_i, Z_l] = (0)$ e $[Z_x, Z_y] = (0)$.

Além disso, se $x = x_1 + \dots + x_k + z_1 + \dots + z_m \in \mathfrak{n}/(0)$, onde $x_i \in \mathfrak{g}_i$ e $z_l \in Z_l$, pelo argumento usado na prova supramencionada, caso $x_j \neq 0$, $\mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{n}$ e analogamente, se $z_l \neq 0$, sendo Z_l subespaço vetorial de dimensão 1, $Z_l \subseteq \mathfrak{n}$ também. (**)

Desta forma, observamos que qualquer ideal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ será ainda soma direta de ideais simples ou de dimensão 1, e logo, será redutível também.

Por 1., sabemos que $\mathfrak{n}$ possui ideal complementar em $\mathfrak{g}$. Na verdade, este ideal será isomorfo a $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. E por consequência, $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ é redutível também.

3.

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] &= [\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k \oplus Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_m ; \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k \oplus Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_m] = \\ &= [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k] \oplus [Z_1, Z_1] \oplus \cdots \oplus [Z_m, Z_m] = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k \end{aligned}$$

($[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ pois os $\mathfrak{g}_i$ são simples)

Logo, é soma direta de ideais simples e assim, semisimples.

$$\begin{aligned} \text{Além disso, } Z(\mathfrak{g}) &= Z(\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k \oplus Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_m) = \\ &= Z(\mathfrak{g}_1) \oplus \cdots \oplus Z(\mathfrak{g}_k) \oplus Z(Z_1) \oplus \cdots \oplus Z(Z_m) = \\ &= Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_m \end{aligned}$$

($Z(\mathfrak{g}_i) = 0$ por serem simples)

($Z(Z_1 \oplus Z_2) = Z(Z_1) \oplus Z(Z_2)$ já que se $x = x_1 + x_2$, $x_i \in Z_i$ então $0 = [x, Z_1] = [x_1, Z_1] + [x_2, Z_1] = [x_1, Z_1] \implies x_1 \in Z_1$, analogamente $x_2 \in Z_2$ e $[x, Z_1] = [x, Z_2] = 0$ por serem ideais abelianos em $\mathfrak{g}$)

Assim, verificamos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k \oplus Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_m = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$.

■

► Representações de Álgebras de Lie Redutíveis:

Dada uma Álgebra de Lie L redutível, pela propriedade **3.**:

$L = Z(L) \oplus [L, L]$, com $[L, L]$ semisimples.

Sabemos como construir uma representação fiel de dimensão finita para $Z(L)$ (usar **I**) e sendo o comutador de L semisimples, o seu centro é trivial, logo, também conhecemos uma representação fiel de dimensão finita para $[L, L]$ (usar **II** uma vez que sendo semisimples, o seu radical é (0) e por consequência, $Z([L, L]) = \{0\}$).

Deste modo, surge de forma muito natural uma representação fiel de L , basta fazer a soma direta das duas representações anteriores!

9 Lema de Neretin

Estamos a poucos passos de finalizar a nossa prova do Teorema de Ado!

No entanto, antes necessitamos um resultado de grande utilidade por si só e que fornece a decomposição duma álgebra de Lie num produto semidireto entre duas subálgebras, o Lema de Neretin:

Lema de Neretin:

Toda a álgebra de Lie L de dimensão finita possui mergulho numa álgebra:

$$\mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{n}$$

onde $\mathfrak{r}$ é subálgebra redutível e $\mathfrak{n}$ é um ideal nilpotente.

[Nota: Como foi mencionado na secção 7: Produto Semidireto, estamos a tomar o produto semidireto interno na proposição supra!]

10 Decomposição de Jordan-Chevalley, Teorema de Levi, Expansão Elementar

A prova do Lema de Neretin usa dois teoremas fundamentais bem conhecidos:

1. Decomposição de Jordan-Chevalley:

V espaço vetorial e $x \in \mathfrak{gl}(V)$, com $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$.

Existem $x_d, x_n \in \mathfrak{gl}(V)$ tais que:

$$x = x_d + x_n, \text{ onde:}$$

- x_d é endomorfismo diagonalizável ;
- x_n é endomorfismo nilpotente ;
- $x_d \circ x_n = x_n \circ x_d$.

Esta decomposição é única!

2. Teorema de Levi:

Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie.

Então existe uma subálgebra semisimples $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$, com $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$ e que satisfaz:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \text{Rad}(\mathfrak{g})$$

Além de recorrermos a dois resultados emblemáticos da Teoria de Lie, iremos também necessitar de um novo conceito: a Expansão Elementar duma álgebra de Lie, introduzido infra.

► **Definição 10**

Expansão Elementar de L :

Seja L Álgebra de Lie, com $\mathbb{F}$ o corpo associado a este espaço vetorial. Vamos assumir que L possui um ideal de codimensão 1, digamos I .

Sabemos então que $L = I \oplus \langle x \rangle$, para algum $x \in L$. Consideramos também a adjunta de x , $ad_x : I \rightarrow I$ a qual possui decomposição de Jordan-Chevalley: $ad_x = d_s + d_n$.

Definimos também o seguinte espaço:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{F}^2 + I$$

Pondo $\{v, w\}$ base de $\mathbb{F}^2$ (também tomando como corpo associado $\mathbb{F}$), $\mathfrak{g}$ torna-se uma álgebra de Lie se impusermos:

$$[v, w] = 0, [v, i] = d_s(i) \text{ e } [w, i] = d_n(i), \text{ para } i \in I.$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{F}^2 + I$ é chamada de: **expansão elementar de L** .

► Note-se que $I + \langle v + w \rangle \cong L$, logo, L mergulha na sua expansão elementar e $[L, L] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Demonstração do Lema de Neretin [Esboço]:

Devido à demonstração deste lema fazer uso de técnicas e conceitos já conhecidos, irei apenas realizar um esboço da mesma. Todos os pormenores podem ser consultados em [2]. É de ressaltar que o autor deste artigo usa como corpo base $\mathbb{C}$ mas podíamos substituí-lo por qualquer outro corpo $\mathbb{F}$ de caraterística nula.

Seja L álgebra de Lie de dimensão finita n com decomposição de Levi dada por:

$$L = \mathfrak{h} \ltimes \text{Rad}(L), \text{ onde } \mathfrak{h} \text{ é subálgebra semisimples (logo, redutível)}$$

Notamos que:

- $[L, \text{Rad}(L)] \subseteq \text{Nil}(L)$; (1)
- $[L, L] \subseteq \mathfrak{h} \ltimes [L, \text{Rad}(L)]$. (2)

Uma justificação para (1) reside no facto de este ideal ser nilpotente, afirmação provada em [3], com a pequena ressalva de que a sua prova faz uso da $\text{char}(\mathbb{F})=0$.

Para ver (2) basta observar que $[L, L] = [\mathfrak{h} \ltimes \text{Rad}(L); \mathfrak{h} \ltimes \text{Rad}(L)] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [L, \text{Rad}(L)] = \mathfrak{h} + [L, \text{Rad}(L)]$.
(se $\mathfrak{h}$ é semisimples, como o corpo base tem caraterística 0 é soma de ideais simples $\mathfrak{h}_i$ e $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_k; \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_k] = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \oplus \dots \oplus [\mathfrak{h}_n, \mathfrak{h}_n] = \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_n = \mathfrak{h}$ por serem simples e $\mathfrak{h} \cap [L, \text{Rad}(L)] \subseteq \mathfrak{h} \cap \text{Rad}(L) = (0)$)

Nota importante! Nesta prova ao invés de recorrer ao radical nilpotente $\text{Nil}(L)$, poderíamos usar qualquer outro ideal nilpotente $\mathfrak{n}$ que contenha $[L, \text{Rad}(L)]$ (este facto será útil para um exemplo posterior).

Caso I: $L = \mathfrak{h} \ltimes \text{Nil}(L)$, está provado o lema.

Caso II: $\mathfrak{h} \ltimes \text{Nil}(L)$ é uma álgebra estritamente contida em L .

Neste caso, terá de existir subespaço I de dimensão $n - 1$ contendo $\mathfrak{h} \ltimes \text{Nil}(L)$ (e por consequência $\mathfrak{h} \ltimes [L, \text{Rad}(L)]$ e $[L, L]$). Assim, $I \trianglelefteq L$!

Agora, realizamos a Expansão Elementar de L através de I como foi mencionado na página anterior!

Dessa forma, obtemos as álgebras:

- $L' = \mathfrak{g} = \langle v, w \rangle + I$;
- $\mathfrak{h}' = \langle v \rangle + \mathfrak{h}$;
- $\mathfrak{n}' = \langle w \rangle + \text{Nil}(L)$.

É possível verificar que, na verdade, $\mathfrak{h}' = \langle v \rangle \oplus \mathfrak{h}$, logo $\mathfrak{h}'$ permanece redutível, $\mathfrak{n}'$ permanece ideal nilpotente (por ser soma de nilpotentes) e a ação de $\mathfrak{h}'$ em $\mathfrak{g}$ é completamente redutível!

Este processo tem por objetivo final obter algo da forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' \ltimes \mathfrak{n}'$, ou seja, uma Expansão Elementar que iguale o produto semidireto de uma subálgebra redutível com um ideal nilpotente. No entanto, não é necessariamente ao fim de apenas uma iteração que o iremos conseguir... Temos, porém, garantia de que eventualmente, este algoritmo vai ter um fim se o aplicarmos sucessivamente a cada novo terno de álgebras $(L', \mathfrak{h}', \mathfrak{n}')$!

Isto deve-se a:

- $\dim(L') = \dim(L) + 1$;
- $\dim(\mathfrak{h}') = \dim(\mathfrak{h}) + 1$;
- $\dim(\mathfrak{n}') = \dim(\mathfrak{n}) + 1$.

E ao facto da dimensão de $\mathfrak{h}' \ltimes \mathfrak{n}'$, igual a $\dim(\mathfrak{h}') + \dim(\mathfrak{n}')$, estar cada vez mais próxima de $\dim(L')$ dado que:

$$\dim(L') - [\dim(\mathfrak{h}') + \dim(\mathfrak{n}')] = \dim(L) - [\dim(\mathfrak{h}) + \dim(\mathfrak{n})] - 1$$

Em conclusão, a partir duma certa ordem obteremos a igualdade entre as dimensões e como tanto desejamos, um produto semidireto duma subálgebra redutível com um ideal nilpotente onde podemos mergulhar L .
Fim da prova!!!

■

11 Teorema de Ado: Demonstração

Primariamente, usando o Lema de Neretin, construímos um mergulho da nossa álgebra L numa álgebra da forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{n}$$

onde $\mathfrak{r}$ é subálgebra redutível e $\mathfrak{n}$ é um ideal nilpotente de L . Consideremos $\mathfrak{k}$ como o núcleo da ação adjunta de $\mathfrak{r}$ em $\mathfrak{n}$, ie, núcleo da representação:

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{r} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}) \\ x &\longmapsto ad(x)|_{\mathfrak{n}} = (ad_x)|_{\mathfrak{n}} : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n} \\ y &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

(Um pequeno pormenor que vale a pena ter em atenção é que esta ação tem de facto conjunto de chegada $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$ devido a $\mathfrak{n}$ ser ideal!)

Vamos provar que $\mathfrak{g} = (\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}) \ltimes \mathfrak{n}$, onde:

- $\mathfrak{s}$ é o ideal complementar de $\mathfrak{k}$ (em $\mathfrak{r}$);
- $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{r}/\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$ atua fielmente em $\mathfrak{n}$;
- $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$ são redutíveis;
- e $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{k} \oplus (\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n})$.

Dem.:

Obviamente, $\mathfrak{k} \trianglelefteq \mathfrak{r}$ e por **2.** da página 16 será redutível também!

Além disso, recorrendo à Propriedade da Existência dum Ideal Complementar, existe $\mathfrak{s} \trianglelefteq \mathfrak{r}$ tal que $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{k} = \mathfrak{r}$, também redutível.

$\mathfrak{s}$ atua fielmente em $\mathfrak{n}$:

Considerando ainda a representação $ad|_{\mathfrak{s}}$, pelo que vimos acima,

$\text{Ker}(ad|_{\mathfrak{s}}) = \text{Ker}(ad) \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{s} = (0)$ por serem ideais complementares.

Falta apenas ver que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{k} \oplus (\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n})$, o que é feito através de cálculos diretos:

Pondo

$$\phi : \mathfrak{g} = (\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}) \ltimes \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{k} \oplus (\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n})$$

$$((l, s), n) \rightarrow (l, (s, n))$$

Só precisamos de ter a certeza que ϕ é homomorfismo:

$$\begin{aligned} & \phi([(l, s), n] ; [(l', s'), n']) = \\ & = \phi([(l, s); (l', s')] + [l + s, n'] - [l' + s', n] ; [n, n']) = \\ & = \phi(([l, l']; [s, s']) + \underbrace{[l, n']}_{=0} + [s, n'] - \underbrace{[l', n]}_{=0} + [s', n] ; [n, n']) = (*) \\ & = \phi(([l, l']; [s, s'] + [s, n'] - [s', n]) ; [n, n']) = \\ & = ([l, l'] ; ([s, s'] + [s, n'] - [s', n]; [n, n'])) \end{aligned}$$

(*) vem de $\mathfrak{k}$ ser o núcleo da ação adjunta de $\mathfrak{r}$ em $\mathfrak{n}$, ie, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{n}] = 0$

$$\begin{aligned} & [\phi((l, s), n); \phi((l', s'), n')] = \\ & = [(l, (s, n)) ; (l', (s', n'))] = \\ & = ([l, l'] ; [(s, n); (s', n')]) = \\ & = ([l, l'] ; ([s, s'] + [s, n'] - [s', n]; [n, n'])) \end{aligned}$$

□

Logo, depois de todo o trabalho que tivemos anteriormente, necessitamos apenas de encontrar uma representação fiel de dimensão finita para o produto semidireto $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ onde $\mathfrak{n}$ nilpotente, $\mathfrak{s}$ é reductiva e atua de forma fiel em $\mathfrak{n}$.

Para tal, mais uma vez invocaremos a Álgebra Envolvente Universal: $U(\mathfrak{n})$. Já sabemos que $\mathfrak{n}$ atua em $U(\mathfrak{n})$ através do homomorfismo de multiplicação à esquerda. Além disso, a ação adjunta de $\mathfrak{s}$ em $\mathfrak{n}$ estende-se a uma ação sobre $U(\mathfrak{n})$ da seguinte forma (considerando $y_1 \cdots y_n$ monómio arbitrário em $U(\mathfrak{n})$):

- $[s, 1] = 0$,
- $[s, y_1 \cdots y_n] = \sum_{i=1}^n y_1 \cdots y_{i-1} [s, y_i] \cdots y_n$.

Finalmente, podemos combinar a ação multiplicativa de $\mathfrak{n}$ com a de $\mathfrak{s}$ numa ação única de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ em $U(\mathfrak{n})$ fazendo a sua soma:

$$\begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} \times y_1 \cdots y_n = ny_1 \cdots y_n + [s, y_1 \cdots y_n], \text{ para } s \in \mathfrak{s}, n \in \mathfrak{n}.$$

Esta ação torna $U(\mathfrak{n})$ num $(\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n})$ -módulo!

O resto da prova é muito semelhante ao caso nilpotente.

Definimos a mesma função ord sobre $U(\mathfrak{n})$ que no caso nilpotente, observando que $U^{(m)}(\mathfrak{n})$ é invariante pela ação de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ (pois $ord(\begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} \times t)$ é maior ou igual a $ord(t)$). No fim, teremos uma representação de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ sobre um espaço vetorial de dimensão finita: $U(\mathfrak{n})/U^{(m)}(\mathfrak{n})$.

$$\phi : \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{gl}(U(L)/U^{(m)}(L))$$

$$x \longmapsto \phi(s, n) = \phi_{(s, n)} : U(L)/U^{(m)}(L) \rightarrow U(L)/U^{(m)}(L)$$

$$\phi(s, n)(v) = \phi_{(s, n)}(v) = \begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} \times v$$

Falta apenas averiguar que esta ação é fiel para algum $m \in \mathbb{N}$.

► Pomos $m > k$, onde k é tal que $\mathfrak{n}^k = 0$ e $\mathfrak{n}^{k-1} \neq 0$ (de modo que $\mathfrak{n}$ está mergulhado em $U(\mathfrak{n})/U^{(m)}(\mathfrak{n})$ como vimos no caso nilpotente).

Se ϕ for o homomorfismo de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ sobre $\mathfrak{gl}(U(\mathfrak{n})/U^{(m)}(\mathfrak{n}))$:

$$\begin{aligned} Ker(\phi) &= \{x \in \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n} : \phi_x = 0\} = \\ &= \{x \in \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n} : \phi_x(y) = 0 \quad (\forall y \in U(\mathfrak{n})/U^{(m)}(\mathfrak{n}))\} = \\ &= \{x \in \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n} : x \times y = 0 \quad (\forall y \in U(\mathfrak{n})/U^{(m)}(\mathfrak{n}))\} \end{aligned}$$

► Então caso ϕ não seja representação fiel, existe $(s, n) \in \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n} / \{(0, 0)\}$

tal que $\begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} \times t = 0, \forall t \in U(\mathfrak{n})/U^{(m)}(\mathfrak{n})$;

Nestas condições, $n = n * 1 + [s, 1] = \begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} \times 1 = 0$, logo, $n = 0$;

► $0 = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \times U(\mathfrak{n})/U^{(m)}(\mathfrak{n}) \supseteq \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathfrak{n} = [s, \mathfrak{n}];$

A restrição da ação adjunta a $\mathfrak{s}$ em $\mathfrak{n}$ é fiel, logo, $s = 0$!

Obtemos assim uma representação fiel de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ sobre o espaço $U(\mathfrak{n})/U^{(m)}(\mathfrak{n})$ com dimensão finita e por toda a construção organizada anteriormente, $\mathfrak{g}$ e, por consequência, L possuem uma representação fiel de dimensão finita!

Terminamos a nossa prova. ■

12 Aplicações, Exemplos e Consequências

Poderia terminar aqui a nossa digressão sobre o Teorema de Ado e todos os seus pequenos-grandes detalhes, no entanto, este relatório estaria incompleto se não citasse alguns resultados e corolários de um dos teoremas mais significativos da Teoria de Representação!

► Teorema de Iwasawa:

O primeiro, resultante duma combinação entre o Teorema de Ado e uma afirmação provada por Kenkichi Iwasawa permite remover a restrição sob a característica do corpo base, tornando verdadeira a afirmação mais geral:

Teorema

Para qualquer álgebra de Lie L de dimensão finita existe uma representação fiel de L , $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ num espaço V de dimensão finita.

Desta forma, podemos, assumir que qualquer álgebra de Lie, mesmo com corpo base de característica não nula vai possuir também uma representação fiel de dimensão finita, sendo que antes poderiam existir algumas incertezas. Esta liberdade de escolha contrasta com as restrições (imprescindíveis) presentes em resultados como o Teorema de Lie e o de Engel, que exigem pelo menos a hipótese de característica nula o que, de certo modo, enfatiza ainda mais esse seu perfil generalista.

► Terceiro Teorema de Lie:

Um corolário do teorema de Ado é o Terceiro Teorema de Lie que afirma que:

Toda álgebra de Lie de dimensão finita é isomorfa à álgebra de Lie de algum grupo de Lie.

De facto, sem perda de generalidade, podemos considerar $\mathfrak{g}$ como uma álgebra de Lie de dimensão finita contida em, digamos, $End(\mathbb{R}^n) = GL_n(\mathbb{R})$. Podemos então também ter em conta o grupo $\tilde{G}$ formado pelas curvas de classe c^1 , $\gamma : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ tais que $\gamma'(t)\gamma(t)^{-1} \in \mathfrak{g} \forall t \in [0, 1]$ e munido da operação de grupo dada pela concatenação (posteriormente quocientado por reparametrizações e translações no tempo).

Por fim, o novo grupo G^F obtido através do quociente de G por homotopias que fixam os pontos finais possui dimensão finita e é possível atribuir-lhe uma topologia (e uma estrutura suave) que o torna um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

► Como construir uma representação fiel de $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})$:

O conjunto das matrizes triangulares superiores é um exemplo duma álgebra de Lie solúvel (mas não nilpotente). Considere-se o espaço $L = \mathfrak{t}_2(\mathbb{C})$ das matrizes 2×2 triangulares superiores com entradas complexas, gerado por:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O colchete de Lie é então dado por: $[x_1, x_2] = 2x_2$ e os restantes iguais a zero.

Vamos ver como podemos encontrar uma representação fiel desta álgebra de Lie com o nosso algoritmo:

1. Primeiro, começamos com alguns cálculos simples sobre $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})$:

- $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^1 = \mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^{(1)} = [\mathfrak{t}_2(\mathbb{C}), \mathfrak{t}_2(\mathbb{C})] = \langle x_2 \rangle$;
- $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^n = \mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^1$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^{(2)} = 0$;
- $Z(\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})) = \langle x_3 \rangle$;
- $[L, \text{Rad}(L)] = [L, L] = \langle x_2 \rangle$.

2. Vamos encontrar um ideal nilpotente $\mathfrak{n}$ que contenha $[L, \text{Rad}(L)]$ (recordar a "Nota importante" presente na página 15):

Ora, $\mathfrak{n} = \langle x_2, x_3 \rangle = Z(L) \oplus [L, L]$ é um exemplo de um ideal abeliano ($\mathfrak{n}^1 = 0$) e nilpotente que contém $[L, \text{Rad}(L)]$.

3. Mergulhar/construir L como um produto semidireto duma subálgebra redutível com um ideal nilpotente:

$$L = \mathfrak{t}_2(\mathbb{C}) = \langle x_1 \rangle \ltimes \mathfrak{n}$$

Além disso, $\langle x_1 \rangle$ atua fielmente em $\mathfrak{n}$, basta considerar a representação:

$$\phi : \langle x_1 \rangle \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$$

$$\lambda x_1 \rightarrow \phi(\lambda x_1) = (\phi_{\lambda x_1}) : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n}$$

$$\phi_{\lambda x_1}(a_2 x_2 + a_3 x_3) = [\lambda x_1; a_2 x_2 + a_3 x_3] = 2\lambda a_2 x_2$$

e ver que $\phi(\lambda x_1) = \phi_{\lambda x_1}$ é identicamente nula se e só se $2\lambda a_2 x_2 = 0, \forall a_2 \in \mathbb{C}$ se e só se $\lambda = 0$, ou seja, $Ker(\phi) = (0)$ e ϕ é injetiva!

4. Usar a Álgebra Universal Envolvente $U(\mathfrak{n})$ e $U(\mathfrak{n})/U^m(\mathfrak{n})$, $m \in \mathbb{N}$:

Notamos que $m = 2$ basta pois $\mathfrak{n}^1 = (0)$.

Na verdade, sabemos que $U^2(\mathfrak{n})$ é gerado pelos monómios de ordem menor ou igual a 2. E:

- $ord(1) = 0$
- $ord(x_2) = \max\{s \mid x_2 \in \mathfrak{n}^{s-1}\} = 1$
- $ord(x_3) = \max\{s \mid x_3 \in \mathfrak{n}^{s-1}\} = 1$

Estes são os únicos monómios da base P.B.W. de $U(\mathfrak{n})$ com ordem < 2 .

Logo, geram $U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n})$ e uma "base" deste espaço pode ser dada na forma: $\{1, x_2, x_3\}$ (aqui estamos a omitir de que se trata da classe de $1, x_2$ e x_3 em $U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n})$, de modo a simplificar a escrita).

5. Realizar a representação de $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C}) = \langle x_1 \rangle \ltimes \mathfrak{n}$ em $U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n})$ usando a ação descrita na demonstração:

Pomos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ n \end{pmatrix} \times y_1 \cdots y_n = ny_1 \cdots y_n + [x_1, y_1 \cdots y_n], \text{ para } s \in \mathfrak{s}, n \in \mathfrak{n}.$$

E consideramos a representação:

$$\phi: \mathfrak{t}_2(\mathbb{C}) = \langle x_1 \rangle \ltimes \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{gl}(U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n}))$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \phi_{(x_1, n)} : U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n}) \longrightarrow U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n})$$

$$\phi_{(x_1, n)}(y_1 \cdots y_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ n \end{pmatrix} \times y_1 \cdots y_n$$

Ora, para construir esta representação teríamos de averiguar a imagem de cada elemento em $\{1, x_2, x_3\}$ por ϕ_{x_1} , ϕ_{x_2} e ϕ_{x_3} . Apenas irei realizar alguns destes cálculos abaixo (os restantes são análogos):

- $\phi_{x_1}(x_2) = \phi_{(x_1, 0)}(x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times x_2 = [x_1, x_2] = 2x_2$
- $\phi_{x_1}(x_3) = \phi_{(x_1, 0)}(x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times x_3 = [x_3, x_2] = 0$
- $\phi_{x_3}(x_2) = \phi_{(0, x_3)}(x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \times x_2 = x_3x_2 = x_2x_3 - [x_2, x_3] = 0 + 0 = 0$

(esta última devido deve-se ao quociente por $\langle xy - yx - [x, y] \mid x, y \in L \rangle$ e ao facto de $\text{ord}(x_2x_3) = 2 \geq m$)

No final, obtemos as representações matriciais relativas à base $\{1, x_2, x_3\}$ dadas por:

- $\phi_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

- $\phi_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

- $\phi_{x_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

13 Conclusão

Em conclusão, podemos averiguar que apesar da sua prova exigir conceitos e raciocínios um pouco mais avançados, o Teorema de Ado, bem como a sua demonstração proporcionam uma forma de "ver" qualquer álgebra de Lie (possivelmente com um colchete bastante invulgar) como um subconjunto dos endomorfismos de algum espaço vetorial, onde o parêntesis de Lie em questão é bem conhecido por nós.

Assim, através desta poderosa ferramenta, grandes resultados como o Terceiro Teorema de Lie emergem como seus corolários e, certamente, muitos outros ainda hão de surgir.

Referências

- [1] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, 1972.
- [2] Hofer Joachim. *An introduction to Lie algebras and the theorem of Ado*. Accessed: 2024-06-17. 2013. URL: https://homepage.univie.ac.at/dietrich.burde/papers/bachelor_hofer_2013.pdf.
- [3] Nicholas G. Triantafillou. *Ado's Theorem*. Accessed: 2024-06-17. 2015. URL: https://ngtriant.github.io/notes/ados_theorem.pdf.