

Sistemas Dinâmicos - Cálculo de Entropias

Seminário

Índice

- 1 Entropia do Deslocamento
- 2 Entropia da Transformação de Gauss
- 3 Entropia no Toro
- 4 Entropia e Equivalência
- 5 Fim

Entropia do Deslocamento

Seja $\Sigma = \{1, \dots, d\}^{\mathbb{N}} = \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$.

▶ $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ o deslocamento.
 $(x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n$

▶ μ medida de Markov com matriz estocástica $P = (P_{ij})_{i,j}$ e vetor de probabilidade $p = (p_i)_i$.

Teorema (Entropia do Deslocamento)

$$h_{\mu}(\sigma) = - \sum_{a,b=1}^d p_a \cdot P_{ab} \log(P_{ab})$$

Demonstração

Recordar :

Teorema (Kolmogorov–Sinai)

Seja $\bar{P}_1 \prec \dots \prec \bar{P}_n \prec \dots$ uma sequência não-decrescente de partições com entropia finita tais que $\bigcup_{n \geq 1} \bar{P}_n$ gera a σ -álgebra dos conjuntos mensuráveis a menos de medida nula.

Então:

$$h_\mu(\sigma) = \lim_n h_\mu(\sigma, \bar{P}_n) .$$

Demonstração [...]

Propriedades :

- ▶ $\mu(C[0 ; a_1, \dots, a_n]) = p_{a_1} P_{a_1 a_2} \dots P_{a_{n-1} a_n} ;$
- ▶ $\sum_i p_i P_{ij} = p_j ;$
- ▶ $\sum_j P_{ij} = 1 ;$
- ▶ $\sum_{x,y} a(x)b(x,y) = \sum_x a(x)[\sum_y b(x,y)] = \sum_x a(x) \sum_y b(x,y) .$

Escolhemos a partição $\bar{P}$ dos cilindros $C[0; i]$ com $i = 1, \dots, d$.

Logo, $\bar{P}^n$ será assim a partição dos cilindros $C[0 ; a_1, \dots, a_n]$, com $a_i \in \mathbb{D}$.

Demonstração [...]

$$\begin{aligned} H_\mu(\bar{P}^n) &:= - \sum_{a_1, \dots, a_n=1}^d \mu(C[0; a_1, \dots, a_n]) \cdot \log(\mu(C[0; a_1, \dots, a_n])) = \\ &= - \sum_{a_1, \dots, a_n} p_{a_1} P_{a_1 a_2} \dots P_{a_{n-1} a_n} \cdot \{\log(p_{a_1}) + \log(P_{a_1 a_2}) + \dots + \log(P_{a_{n-1} a_n})\} = \\ &= \sum_{a_1, \dots, a_n} -p_{a_1} \log(p_{a_1}) \dots P_{a_{n-1} a_n} + \sum_{a_1, \dots, a_n} -\{\log(P_{a_1 a_2}) + \dots + \log(P_{a_{n-1} a_n})\} \cdot p_{a_1} \dots P_{a_{n-1} a_n} \end{aligned}$$

Demonstração [...]

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{a_1} -p_{a_1} \log(p_{a_1}) \sum_{a_2, \dots, a_n} P_{a_1 a_2} \dots P_{a_{n-1} a_n} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n \sum_{a_j, a_{j+1}} \{\log(P_{a_j a_{j+1}})\} \cdot \sum_{a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+2}, \dots, a_n} p_{a_1} \dots p_{a_{n-1} a_n}
 \end{aligned}$$

Agora, basta verificar que:

- $\sum_{a_2, \dots, a_n} P_{a_1 a_2} \dots P_{a_{n-1} a_n} = 1$;
- $\sum_{a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+2}, \dots, a_n} p_{a_1} \dots p_{a_{n-1} a_n} = p_{a_j} P_{a_j a_{j+1}}$.

Demonstração [...]

Assim:

$$\begin{aligned}
 H_\mu(\bar{P}^n) &= \\
 &= \sum_{a_1} -p_{a_1} \log(p_{a_1}) \\
 &\quad - \\
 &\sum_{j=1}^n \sum_{a_j, a_{j+1}} \{\log(P_{a_j a_{j+1}})\} \cdot p_{a_j} P_{a_j a_{j+1}} = \\
 &= \text{const} - n \cdot \sum_{i,j=1}^d p_i P_{ij} \log(P_{ij})
 \end{aligned}$$

Desta forma, $\mathfrak{h}_\mu(\sigma) = \lim_n \frac{1}{n} \cdot H_\mu(\sigma, \bar{P}^n) = - \sum_{a,b} p_a \cdot P_{ab} \log(P_{ab})$.



Transformação de Gauss

Vamos calcular a entropia da transformação de Gauss $G(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ em $[0,1]$ relativamente à medida G -invariante:

$$\mu(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{1}{1+x} dx$$

Consideramos a partição do intervalo $[0,1]$ dada por: $\bar{P} = \{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$.

E como, de costume, $\bar{P}^n = \bar{P} \vee G^{-1}(\bar{P}) \vee \dots \vee G^{-n}(\bar{P})$.

Resultados sobre a Transformação de Gauss

(A) $\forall n \in \mathbb{N} : G^n$ restrito a cada intervalo $P_n \in \overline{P^n}$ forma um difeomorfismo sobre $(0,1)$;

(B)

$$\text{diam}(P_n(x)) \xrightarrow{n} 0 \quad \mu - \text{q.t.p} \quad ;$$

(C) $\exists C > 1 : |(G^n)'(y)|/|(G^n)'(x)| \leq C$ para quaisquer x, y no mesmo elemento da partição $\overline{P^n}$ e $n \in \mathbb{N}$;

$$(D) \ 1/(2 \cdot \log 2) \leq \frac{\mu(P_n)}{m(P_n)} \leq 1/\log 2.$$

Entropia da Transformação de Gauss

Teorema (Entropia da Transformação de Gauss)

Seja G a transformação de Gauss em $(0,1)$ e μ a medida G -invariante supra-mencionada. Então:

$$h_{\mu}(G) = \int \log |G'| \, d\mu$$

Entropia da Transformação de Gauss [Demonstração]

Por definição:

$$H_\mu(\overline{P^n}) = \sum_{P_n \in \overline{P^n}} -\mu(P_n) \log(\mu(P_n)) = \int \psi_n(x) \, d\mu,$$

Onde colocamos $\psi_n(x) = -\log(\mu(P_n(x)))$. (medida μ do conjunto da partição que tem x)

Pela propriedade (A), $\log(\mu(P_n(x))) = -\log|(G^n)'(y)|$, para algum $y \in P_n(x)$.

$$(C) \quad |(G^n)'(y)| / |(G^n)'(x)| \leq C \Rightarrow \log|(G^n)'(y)| - \log|(G^n)'(x)| \leq \log(C)$$

Então substituindo em (*) com o que obtivemos por (C):

$$(D) \Rightarrow -\log(c_1) \geq \psi_n(x) + \log(m(P_n(x))) \geq -\log(c_2) \Leftrightarrow$$

$$(A) \Leftrightarrow -\log(c_1) \geq \psi_n(x) - \log|(G^n)'(y)| \geq -\log(c_2) \Leftrightarrow$$

$$(C) \Leftrightarrow -\log(c_1) - \log(C) \geq \psi_n(x) - \log|(G^n)'(x)| \geq -\log(c_2) + \log(C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log(C \cdot c_1) \geq \int \psi_n(x) - \log|(G^n)'(x)| \, d\mu \geq \log(C/c_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log(C \cdot c_1) \geq H_\mu(\overline{P^n}) - \int \log|(G^n)'(x)| \, d\mu \geq \log(C/c_2)$$

Agora, usando que a medida μ é invariante por esta transformação, vem:

$$\int \log |(G^n)'(x)| \, d\mu = n \cdot \int \log |G'| \, d\mu$$

Dividindo cada termo da desigualdade anterior por n , concluímos que:

$$h_\mu(G, \bar{P}) = \frac{1}{n} H_\mu(\bar{P}^n) = \int \log |G'| \, d\mu$$

Usando o facto de que $\bar{P}$ é uma partição com $\text{diam}(P_n(x)) \rightarrow_n 0$ para todo $x \in (0, 1)$, podemos mesmo afirmar que:

$$h_\mu(G) = \int \log |G'| \, d\mu.$$



Entropia no Toro $\mathbb{T}^d$

Seja $\mathbb{T}^d$ o toro de dimensão d , isto é, $\mathbb{T}^d \simeq \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$.

- ▶ $f_A : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ endomorfismo linear, induzido por uma matriz A (invertível com coeficientes em $\mathbb{Z}$);
- ▶ μ medida de Haar em $\mathbb{T}^d$.

Teorema (Entropia de Operadores Lineares em $\mathbb{T}^d$)

$$h_\mu(f_A) = - \sum_{\lambda_k: |\lambda_k| > 1} \log |\lambda_k|,$$

onde os λ_k são os valores próprios de A (contados com multiplicidade).

Supomos, inicialmente, A diagonalizável. Posteriormente, vamos generalizar, para qualquer matriz, usando a Forma Canónica de Jordan!

$v_1, \dots, v_d$ base (o.n.) de $\mathbb{R}^d$ de vetores próprios.

Ordenamos esta lista de forma a que os primeiros u vetores sejam os associados a valores próprios com módulo > 1 .

Seja $x \in \mathbb{T}^d$.

► Todo o ponto y numa vizinhança de x pode ser escrito como:

$$y = x + \sum_{i=1}^d t_i v_i$$

com $t_1, \dots, t_d$ perto de 0.

Definimos:

$$D(\mathbf{x}, \epsilon) := \left\{ \mathbf{x} + \sum_{i=1}^d t_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{T}^d : |t_i| < \epsilon \ (\forall i = 1, \dots, d) \right\}$$

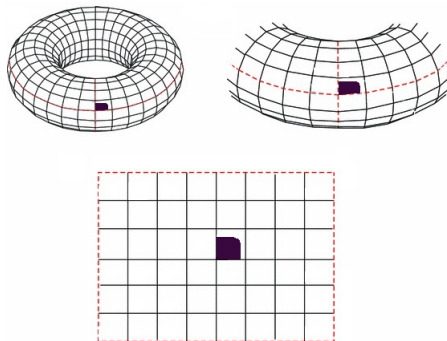
$$D(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \epsilon) := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{T}^d : f_A^j(\mathbf{y}) \in D(f_A^j(\mathbf{x}), \epsilon) \ (\forall j = 0, \dots, n-1) \right\}$$

Mas usando que os $\mathbf{v}_i$ são valores próprios de f_A , se $\mathbf{y}$ tem a forma $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^d t_i \mathbf{v}_i$, então:

$$f_A^j(\mathbf{y}) = f_A^j(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^d (t_i \lambda_i^j) \mathbf{v}_i$$

Assim, separando o caso de $i \leq u$ e $i > u$ também temos que:

$$D(x, n, \epsilon) = \{ y \in \mathbb{T}^d : |\lambda_i^n t_i| < \epsilon, \text{ para } i \leq u \quad \wedge \quad |t_i| < \epsilon, \text{ para } i > u \}$$



Logo, existe constante $C_1 > 1$ tal que :

$$C_1^{-1} \epsilon^d \prod_{i=1}^u |\lambda_i|^{-n} \leq \mu(D(x, n, \epsilon)) \leq C_1 \epsilon^d \prod_{i=1}^u |\lambda_i|^{-n}$$

Como estamos em $\mathbb{R}^d$, espaço de Banach de dimensão finita, arranjamos constante $C_2 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$B(x, \epsilon/C_2) \subseteq D(x, \epsilon) \subseteq B(x, C_2\epsilon)$$

$$\therefore B(x, n, \epsilon/C_2) \subseteq D(x, n, \epsilon) \subseteq B(x, n, C_2\epsilon)$$

$$\therefore C^{-1}\epsilon^d \prod_{i=1}^u |\lambda_i|^{-n} \leq \mu(B(x, n, \epsilon)) \leq C\epsilon^d \prod_{i=1}^u |\lambda_i|^{-n}.$$

$$h_{\mu}^{+}(f_A, \epsilon, x) = h_{\mu}^{-}(f_A, \epsilon, x) = \lim_n \frac{1}{n} \log(\mu(B(x, n, \epsilon))) = \sum_{i=1}^u \log|\lambda_i|$$

Pelo Teorema de Brin-Katok, como existem os limites $h_{\mu}^{+}(f_A, \epsilon, x)$ e $h_{\mu}^{-}(f_A, \epsilon, x)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ e são iguais μ -q.t.p., a entropia é:

$$h_{\mu}(f_A) = \int h_{\mu}(f_A, x) \, d\mu = \sum_{i=1}^u \log|\lambda_i|$$



Entropia e Equivalência

Vamos agora verificar que, de facto, o valor da entropia é um invariante de sistemas ergodicamente equivalentes:

Teorema (Entropia de Sistemas Ergodicamente Equivalentes)

Sejam $f : M \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N$ transformações com probabilidades invariantes μ e ν . Se (f, μ) é ergodicamente equivalente a (g, ν) , então:

$$h_\mu(f) = h_\nu(g)$$

- ▶ Seja $\phi : M \rightarrow N$ tal que $\phi_*(\mu) = \nu$, $\phi \circ f = g \circ \phi$ e existem subconjuntos de medida total $X \subseteq M$ e $Y \subseteq N$ tais que ϕ é bijeção mensurável de X em Y com inversa mensurável.
- ▶ Se $\bar{P}$ é partição de M , então $\bar{P}$ restrita a X também será partição de X ;
- ▶ pômos $\bar{Q} = \phi(\bar{P})$ de modo a obtermos uma partição de Y e de N ;

$$H_\nu(\bar{Q}) = - \sum_{Q \in \bar{Q}} \nu(Q) \cdot \log(\nu(Q)) = - \sum_{P \in \bar{P}} \mu(P) \cdot \log(\mu(P)) = H_\mu(\bar{P})$$

(para qualquer partição $\bar{P}$ de X e M)

Assim, $\mathfrak{h}_\nu(g) \geq \mathfrak{h}_\mu(f)$.

Analogamente, se mostra a outra desigualdade, logo: $\mathfrak{h}_\mu(f) = \mathfrak{h}_\nu(g)$.



Entropia e Equivalência, a Recíproca?

É claro que, na maioria dos casos, dois sistemas com entropias iguais não serão necessariamente equivalentes.

No entanto, temos um caso muito especial, conhecido por todos nós, onde isso acontece:

Teorema (Shifts de Bernoulli Ergodicamente Equivalentes)

Dois deslocamentos de Bernoulli bilaterais em espaços de Lebesgue são ergodicamente equivalentes se, e somente se, as suas entropias são iguais.

Dois deslocamentos de Bernoulli unilaterais correspondentes a vetores de probabilidade $p = (p_1, \dots, p_k)$ e $q = (q_1, \dots, q_l)$ são ergodicamente equivalentes se, e somente se, $k = l$ e o vetor p é permutação do vetor q .

Fim !