

Teorema de Ado

Teoria de Representação

Índice

- 1 Introdução
- 2 Representações
- 3 Teorema de Ado, caso nilpotente
- 4 Teorema de Ado
- 5 Aplicações
- 6 Fim

Álgebras de Lie

$\mathcal{L}$ é uma **Álgebra de Lie** se for um espaço vetorial munido duma operação $[,] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ bilinear que satisfaz:

- $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathcal{L};$
- $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \forall x, y, z \in \mathcal{L}.$

Exemplo Importante: A álgebra de Lie dos Endomorfismos

Considere-se V um espaço vetorial. A partir de V podemos definir:

- **End(V)**: conjunto dos endomorfismos de V , isto é, o conjunto formado pelas aplicações lineares $V \rightarrow V$.

End(V) é também uma álgebra de Lie, se considerarmos o colchete de Lie:

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

- No contexto das álgebras de Lie, End(V) será denotado por **gl(V)**.

Homomorfismos de Álgebras de Lie

Dadas duas álgebras de Lie, L e V , uma aplicação linear $\phi : L \rightarrow V$ é um **homomorfismo de álgebras de Lie** se:

- $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$

Caso ϕ seja ainda bijetiva, dizemos que é um **isomorfismo de álgebras de Lie**.

Subálgebras, Ideais e Álgebras Quociente

Seja L uma álgebra de Lie.

$K \leq L$ (subespaço vetorial) é uma **subálgebra** se:

- $x, y \in K \Rightarrow [x, y] \in K$

$\mathcal{I} \leq L$ (subespaço vetorial) é um **ideal** ($\mathcal{I} \trianglelefteq L$) se:

- $i \in \mathcal{I}, x \in L \Rightarrow [x, i] \in \mathcal{I}$

► $Z(L)$ e $[L, L]$ são ideais!

► Iremos representar por $\langle G \rangle$ o **ideal gerado por G** , ou seja, o menor ideal que contém este conjunto.

Dada uma álgebra de Lie L e um ideal $\mathcal{I}$ podemos construir a **Álgebra Quociente, $L/\mathcal{I}$** , onde:

- $L/\mathcal{I} = \{x + \mathcal{I} \mid x \in L\}$;
- a operação $[,]$ é (bem) definida por: $[x + \mathcal{I}, y + \mathcal{I}] = [x, y] + \mathcal{I}$.

Definição de Representação

Uma **representação** duma álgebra de Lie L (num espaço vetorial V) é um homomorfismo $\phi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Dizemos que uma representação ϕ é **fiel** se for injetiva.

Estamos em condições de enunciar o objeto principal do nosso estudo:

Teorema (Ado)

Seja L álgebra de Lie de dimensão finita (sobre um corpo de característica nula).

Então existe uma representação fiel de L , $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ num espaço vetorial V de dimensão finita!

Casos simples

Vejamos inicialmente alguns casos onde a construção duma representação fiel de dimensão finita é mais simples:

► Caso I, Álgebras de Lie Abelianas ($Z(L) = L$) :

$$\phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L \times \mathbb{F})$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow \phi(x) = \phi_x : L \times \mathbb{F} &\longrightarrow L \times \mathbb{F} \\ (y, \lambda) &\rightarrow (\lambda x, 0) \end{aligned}$$

► Caso II, $Z(L) = 0$:

$$\text{ad} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow \text{ad}(x) = \text{ad}_x : L &\longrightarrow L \\ y &\rightarrow \text{ad}_x(y) = [x, y] \end{aligned}$$

Produto Tensorial

Dadas duas álgebras de Lie, V e W , é sabido que podemos construir o seu produto tensorial:

$$V \otimes W$$

Mais geralmente, podemos definir $T^m V$ como sendo $V^{\otimes m}$, ou seja, $\bigotimes_{i=1}^m V$. (note-se que a operação $\otimes$ é associativa no sentido que qualquer que seja a ordem escolhida, os resultados serão sempre isomorfos)

Álgebra Universal Envolvente: $U(\mathfrak{g})$

Definimos também a **Álgebra Tensorial** $T(V) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i V$, ou seja, o conjunto dos tuplos $(a_n)_{n \geq 1}$, com $a_n \in T^n V$, de modo que $(a_n)_{n \geq 1}$ é igual a 0 quase sempre.

Onde o produto é dado pelo produto tensorial, ou seja, se $x \in T^k V$ e $y \in T^l V$ então: $xy = x \otimes y \in T^{(k+l)} V$.

Então a **Álgebra Universal Envolvente** de $\mathfrak{g}$ é:

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / \langle a \otimes b - b \otimes a - [a, b] \mid a, b \in \mathfrak{g} \rangle$$

Note-se que $\mathfrak{g}$ atua em $U(\mathfrak{g})$ através de multiplicação à esquerda:

$$\phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(U(L))$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow \phi(x) = \phi_x : U(L) &\longrightarrow U(L) \\ \phi_x(y) &= xy \end{aligned}$$

► ϕ está assim bem definida e é um homomorfismo injetivo, logo, uma representação fiel de L !

Teorema de Ado demonstrado?

► Recordar: **Enunciado do Teorema de Ado**

”[...] existe uma representação fiel de L , $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ num espaço vetorial de dimensão finita.”

Problema: Em geral, $U(\mathfrak{g})$ tem dimensão infinita!

E a justificação reside no seguinte teorema:

Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

Teorema (Poincaré-Birkhoff-Witt)

Suponhamos L álgebra de Lie de base $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Então, de acordo com o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt,

$U(L)$ tem por base os monómios $y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$, onde cada $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$.

Em particular, daqui advém a (infeliz) inferência sobre a dimensão de $U(L)$. Assim, ainda precisamos de avançar um pouco mais para alcançar o nosso objetivo...

Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt [2]

No entanto, antes de o fazermos, é de ressaltar um corolário importante do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt:

Corolário.

Qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ mergulha em $U(\mathfrak{g})$, em particular, o homomorfismo natural $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ é injetivo e podemos identificar $x \in \mathfrak{g}$ com $\iota(x) \in U(\mathfrak{g})$.

Teorema de Ado, caso nilpotente: demonstração

Supomos L álgebra de Lie nilpotente, de forma que $L^k = 0$ e $L^{k-1} \neq 0$.

Escolhemos $(x_1, \dots, x_n)$ base de L de forma a que os primeiros n_i elementos geram L^{k-i} .

- ▶ os monómios $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ formam uma base de $U(L)$;
- ▶ definimos uma função especial, $\text{ord}: U(L) \rightarrow \mathbb{R}$;
- ▶ temos $U^m(L) = \{x \in U(L) : \text{ord}(x) \geq m\}$;
- ▶ $U^m(L) \trianglelefteq U(L)$ e a dimensão de $V = U(L)/U^m(L)$ é finita! (gerada pelos monómios $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ com ordem menor que m)
- ▶ a representação ϕ de L em V dada pela multiplicação à esquerda é fiel no caso $m > k$!



Derivações e Produto semidireto

► Derivações ($\text{Der}(L)$):

Uma derivação numa álgebra de Lie L é uma aplicação linear $\delta : L \rightarrow L$ tal que:

$$\delta([x, y]) = [x, \delta(y)] + [\delta(x), y] \quad \forall x, y \in L$$

Considere-se agora $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ subálgebra de $\mathfrak{g}$, de forma que $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$, como espaços vetoriais.

► Produto semidireto de $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{h}$ (com respeito a um homomorfismo $\delta: \mathfrak{h} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{n})$):

- Colchete de Lie: $[(n, h); (n_0, h_0)] = ([n, n_0] + \delta(h)n_0 - \delta(h_0)n; [h, h_0])$

Denotamos esta nova álgebra de Lie por $\mathfrak{n} \rtimes_{\delta} \mathfrak{h}$.

Produto semidireto interno $\rtimes$

Representaremos por $\mathfrak{n} \rtimes \mathfrak{h}$ o produto semidireto onde a derivação δ é $\delta(x) = \text{ad}_x = [x, \cdot]$.

Este produto semidireto é chamado de **produto semidireto interno**.

De forma que, o colchete de Lie é:

$$[(n, h); (n_0, h_0)] = ([n, n_0] + [h, n_0] - [h_0, n]; [h, h_0])$$

Álgebras Redutíveis

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **redutível** se a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ é completamente redutível (i.e., soma direta de representações irredutíveis).

Propriedades importantes:

► Se $\mathfrak{g}$ é redutível então:

$$\forall \mathfrak{I} \trianglelefteq \mathfrak{g}, \exists \mathfrak{L} \text{ ideal de } \mathfrak{g} : (\mathfrak{g} = \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{L}).$$

[Existência de um ideal complementar]

► Se $\mathfrak{g}$ é redutível e $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, então ambos $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ são redutíveis.

► Se $\mathfrak{g}$ é redutível, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é semisimples e $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(Assim, encontramos uma representação fiel de dimensão finita de $\mathfrak{g}$)

Lema de Neretin

Teorema (Neretin)

Toda a álgebra de Lie L de dimensão finita pode ser mergulhada numa álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ da forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \ltimes \mathfrak{n}$, onde $\mathfrak{p}$ é subálgebra redutível e $\mathfrak{n}$ ideal nilpotente de $\mathfrak{g}$.

Assim, sendo $\mathfrak{p}$ redutível, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}) \ltimes \mathfrak{n}$, onde:

- $\mathfrak{l}$ é o núcleo da ação adjunta de $\mathfrak{p}$ em $\mathfrak{n}$;
- $\mathfrak{s}$ é o ideal complementar de $\mathfrak{l}$ (em $\mathfrak{p}$);
- $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{p}/\mathfrak{l}$ e $\mathfrak{s}$ atua fielmente em $\mathfrak{n}$;
- $\mathfrak{l}$ e $\mathfrak{s}$ são redutíveis;
- e $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{l} \oplus (\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n})$.

Lema de Neretin: Demonstração

Teorema (Decomposição de Jordan-Chevalley)

V espaço vetorial e $x \in \mathfrak{gl}(V)$, com $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$.

Existem $x_d, x_n \in \mathfrak{gl}(V)$ tais que:

$$x = x_d + x_n, \text{ onde:}$$

- x_d é endomorfismo diagonalizável, x_n nilpotente e $x_d \circ x_n = x_n \circ x_d$.

Esta decomposição é única!

Teorema

Seja $\mathfrak{g}$ Álgebra de Lie.

Então existe uma subálgebra semisimples $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$, com $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{g}/\text{Rad}(\mathfrak{g})$ e que satisfaz:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \text{Rad}(\mathfrak{g})$$

Expansão Elementar de L

L Álgebra de Lie, com $\mathbb{F}$ o corpo associado a este espaço vetorial.
Vamos assumir que L possui um ideal de codimensão 1, digamos I.

Sabemos então que $L = I \oplus \langle x \rangle$, para algum $x \in L$. Consideramos também a adjunta de x, $\text{ad}_x : I \rightarrow I$ a qual possui decomposição de Jordan-Chevalley: $\text{ad}_x = d_s + d_n$.

Definimos também o seguinte espaço:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{F}^2 + I$$

Pondo $\{v, w\}$ base de $\mathbb{F}^2$ (também tomando como corpo associado $\mathbb{F}$), $\mathfrak{g}$ torna-se uma álgebra de Lie se impusermos:

$$[v, w] = 0, [v, i] = d_s(i) \text{ e } [w, i] = d_n(i), \text{ para } i \in I.$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{F}^2 + I$ é chamada de: **expansão elementar de L.**

Teorema de Ado: Demonstração

Vamos lá!

- ▶ $\mathfrak{l}$ é redutível, logo para encontrar uma sua representação fiel, basta encontrar uma para $Z(\mathfrak{l})$ (abeliana), outra para $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ (com centro trivial) e fazer a sua soma;
- ▶ para realizar a prova sobre $\mathfrak{g}$, restanos encontrar representação fiel de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$! ($\mathfrak{s}$ redutível, $\mathfrak{n}$ nilpotente e $\mathfrak{s}$ atua fielmente sobre $\mathfrak{n}$)
- ▶ considere-se a Álgebra Envolvente Universal de $\mathfrak{n}$: $U(\mathfrak{n})$, recordemos que $\mathfrak{n}$ atua em $U(\mathfrak{n})$ através da ação de multiplicação à esquerda;
- ▶ podemos estender a ação adjunta de $\mathfrak{s}$ em $\mathfrak{n}$ a uma ação em $U(\mathfrak{n})$;

Teorema de Ado: Demonstração [2]

► onde:

- $[s, 1] = 0$;
- $[s, y_1 \cdots y_n] = \sum_{i=1}^n y_1 \cdots y_{i-1} [s, y_i] y_{i+1} \cdots y_n$;

► combinando estas duas ações, construímos uma ação de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ em $U(\mathfrak{n})$, a qual define uma estrutura de $(\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n})$ -módulo em $U(\mathfrak{n})$:

$$(s, n) \times y_1 \cdots y_n = ny_1 \cdots y_n + [s, y_1 \cdots y_n]$$

► definimos a mesma função ord sobre $U(\mathfrak{n})$ que no caso nilpotente, observando que $U^m(\mathfrak{n})$ é invariante pela ação de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ (pois $\text{ord}((s, n) \times t) \geq \text{ord}(t)$), o que dá assim uma representação de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ sobre um espaço vetorial de dimensão finita;

Teorema de Ado: Demonstração [3]

- ▶ falta apenas averiguar que esta ação é fiel, para algum $m \in \mathbb{N}$;
- ▶ pomos $m > k$, onde k é tal que $\mathfrak{n}^k = 0$ e $\mathfrak{n}^{k-1} \neq 0$ (de modo que $\mathfrak{n}$ está mergulhado em $U(\mathfrak{n})/U^m(\mathfrak{n})$);
- ▶ se ϕ for a ação de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ sobre $\mathfrak{gl}(U(\mathfrak{n})/U^m(\mathfrak{n}))$:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\phi) &= \{x \in \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n} : \phi_x = 0\} = \\ &= \{x \in \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n} : \phi_x(y) = 0 \quad (\forall y \in U(\mathfrak{n})/U^m(\mathfrak{n}))\} = \\ &= \{x \in \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n} : x \times y = 0 \quad (\forall y \in U(\mathfrak{n})/U^m(\mathfrak{n}))\} \end{aligned}$$

- ▶ então caso ϕ não seja representação fiel, existe $(s, n) \in \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$, não ambos nulos tal que $(s, n) \times t = 0, \forall t \in U(\mathfrak{n})/U^m(\mathfrak{n})$;

Teorema de Ado: Demonstração [4]

► nestas condições, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n} * 1 + [\mathfrak{s}, 1] = (\mathfrak{s}, \mathfrak{n}) \times 1 = 0$, logo, $\mathfrak{n} = 0$;

► $0 = (\mathfrak{s}, 0) \times (U(\mathfrak{n})/U^m(\mathfrak{n})) \supseteq (\mathfrak{s}, 0) \times \mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{n}]$;

A ação adjunta de $\mathfrak{s}$ em $\mathfrak{n}$ é fiel, logo, $\mathfrak{s} = 0$!

Obtemos assim uma representação fiel de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}$ sobre o espaço $U(\mathfrak{n})/U^m(\mathfrak{n})$ e por toda a construção organizada anteriormente, $\mathfrak{l}$ possui uma representação fiel sobre um espaço de dimensão finita.

Terminamos a nossa prova!!!



Teorema de Iwasawa

Teorema (Iwasawa)

Para qualquer álgebra de Lie L de dimensão finita existe uma representação fiel de L , $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ num espaço V de dimensão finita.

Terceiro Teorema de Lie

Teorema (Terceiro Teorema de Lie)

Toda álgebra de Lie de dimensão finita é isomorfa à álgebra de Lie de algum grupo de Lie.

Uma representação fiel de $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})$

Por fim, iremos aplicar a nossa construção de uma representação fiel de dimensão finita a um exemplo particular: $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})$, o conjunto das matrizes triangulares superiores 2×2 .

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Colchete de Lie: $[x_1, x_2] = 2x_2$ e os restantes são nulos.

1. Propriedades da álgebra de Lie $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})$:

- $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^1 = \mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^{(1)} = [\mathfrak{t}_2(\mathbb{C}), \mathfrak{t}_2(\mathbb{C})] = \langle x_2 \rangle$;
- $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^n = \mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^1$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})^{(2)} = 0$;
- $Z(\mathfrak{t}_2(\mathbb{C})) = \langle x_3 \rangle$;
- $[L, \text{Rad}(L)] = [L, L] = \langle x_2 \rangle$.

2. Encontrar um ideal nilpotente $\mathfrak{n}$ que contenha $[L, \text{Rad}(L)]$ (recordar a "Nota importante" presente na página 15 do relatório):

$\mathfrak{n} = \langle x_2, x_3 \rangle = Z(L) \oplus [L, L]$ é um exemplo de um ideal abeliano ($\mathfrak{n}^1 = 0$) e nilpotente que contém $[L, \text{Rad}(L)]$.

3. Mergulhar/construir L como um produto semidireto numa subálgebra redutível com um ideal nilpotente:

$$L = \mathfrak{t}_2(\mathbb{C}) = \langle x_1 \rangle \ltimes \mathfrak{n}$$

$E \langle x_1 \rangle$ atua fielmente em $\mathfrak{n}$.

4. Usar a Álgebra Universal Envolvente $U(\mathfrak{n})$ e $U(\mathfrak{n})/U^m(\mathfrak{n})$, $m \in \mathbb{N}$:

- $m = 2$ basta pois $\mathfrak{n}^1 = (0)$.
- $\{1, x_2, x_3\}$ é uma "base" do espaço $U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n})$ (aqui estamos a omitir de que se trata da classe de $1, x_2$ e x_3 em $U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n})$, de modo a simplificar a escrita).

5. Realizar a representação de $\mathfrak{t}_2(\mathbb{C}) = \langle x_1 \rangle \ltimes \mathfrak{n}$ em $U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n})$ usando a ação descrita na demonstração:

Ação:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix} \times y_1 \cdots y_n = \mathfrak{n} y_1 \cdots y_n + [\mathfrak{x}_1, y_1 \cdots y_n], \text{ para } \mathfrak{s} \in \mathfrak{s}, \mathfrak{n} \in \mathfrak{n}.$$

Representação:

$$\phi: \mathfrak{t}_2(\mathbb{C}) = \langle \mathfrak{x}_1 \rangle \ltimes \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{gl}(U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n}))$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix} \rightarrow \phi_{(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{n})} : U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n}) \longrightarrow U(\mathfrak{n})/U^2(\mathfrak{n})$$

$$\phi_{(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{n})}(y_1 \cdots y_n) = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{n} \end{pmatrix} \times y_1 \cdots y_n$$

No final, obtemos as representações matriciais relativas à base $\{1, x_2, x_3\}$ dadas por:

$$\bullet \phi_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bullet \phi_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bullet \phi_{x_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fim !